Hong Kong Mathematics Olympiad (2022/23)

Heats – Group Event

香港數學競賽 (2022/23)

初賽團體項目

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.
No approximation is accepted.
The diagrams are not necessarily drawn to scale.
除特別指明外，所有答案須以數字的真確值表達，並化至最簡。
不接受近似值。
所有附圖不一定依比例繪成。

Part A

甲部

1. Find the last two digits of 3^{2023}.

   求 3^{2023} 的最尾兩位數字。

2. For $0 < x < 2$, find the value of $\left(\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{4-x^2}+x-2}\right)\left(\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-1}-\dfrac{2}{x}\right)$.

   對於 $0 < x < 2$，求 $\left(\dfrac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}+\dfrac{2-x}{\sqrt{4-x^2}+x-2}\right)\left(\sqrt{\dfrac{4}{x^2}-1}-\dfrac{2}{x}\right)$ 的值。

3. Given that $\tan\alpha$ and $\tan\beta$ are the roots of the quadratic equation $x^2-4x-2=0$.

   Find the value of $\sin^2(\alpha+\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+3\cos^2(\alpha+\beta)$.

   已知 $\tan\alpha$ 和 $\tan\beta$ 是二次方程 $x^2-4x-2=0$ 的根。

   求 $\sin^2(\alpha+\beta)+2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+3\cos^2(\alpha+\beta)$ 的值。

4. Five distinct odd numbers and five distinct even numbers are arranged in a row such that the product of any two consecutive numbers is always even. Find the number of all possible arrangements.
排列 5 個不同的單數及 5 個不同的雙數在同一行使得任意兩個相鄰數的積必為雙數。求所有排列的可能性數目。

5. In Figure 1, M and N are points on AB and BC of ΔABC respectively. MN and the median BD of ΔABC intersect at P. If $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{5}{3}$ and $\dfrac{CN}{BN}=\dfrac{3}{2}$, find the value of $\dfrac{DP}{BP}$.

圖一中，M 和 N 分別是ΔABC 的邊 AB 和 BC 上的點。MN 與ΔABC 的中線 BD 相交於 P。若 $\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{5}{3}$ 及 $\dfrac{CN}{BN}=\dfrac{3}{2}$，求 $\dfrac{DP}{BP}$ 的值。

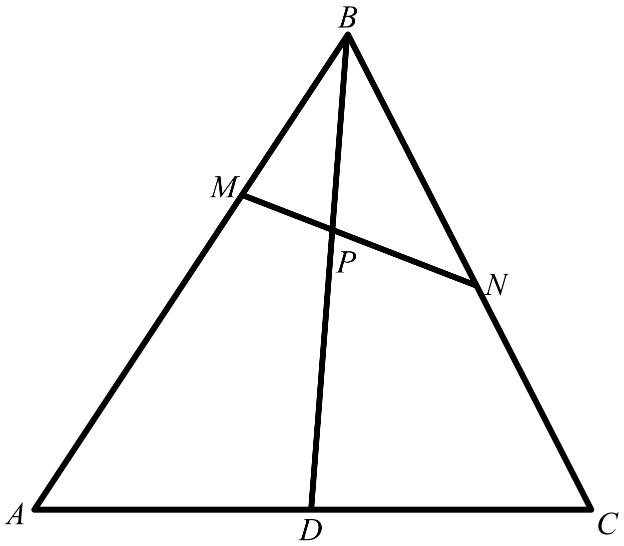

Figure 1
圖一

Part B
乙部

6. If x, y and z are real numbers that satisfy the system of equations $\begin{cases} x+yz=6 \\ y+zx=6 \\ z+xy=6 \end{cases}$. Find the largest possible value of xyz.

設 x、y 及 z 為滿足方程組 $\begin{cases} x+yz=6 \\ y+zx=6 \\ z+xy=6 \end{cases}$ 的實數，求 xyz 的最大值。

7. A sequence of integers $\{a_n\}$ is defined by $a_n = 100 + n^2$, where n is a positive integer. Let d_n be the greatest common divisor of a_n and a_{n+1}. Find the largest possible value of d_n.

正整數數列$\{a_n\}$定義為$a_n = 100 + n^2$，其中 n 為正整數。設 d_n 為 a_n 和 a_{n+1} 的最大公因數。求 d_n 的最大值。

8. Given that x and y are positive real numbers satisfying $x^2 - y^2 = 4$ and $xy = 2$. If the value of $x + y$ can be expressed in the form of $a\sqrt{b+\sqrt{c}}$, where a, b and c are positive integers, find the least value of $100a + 10b + c$.

已知 x 及 y 均為正實數且滿足 $x^2 - y^2 = 4$ 及 $xy = 2$。若 $x + y$ 的值可寫成 $a\sqrt{b+\sqrt{c}}$，其中 a、b 及 c 均為正整數，求 $100a + 10b + c$ 的最小值。

9. Define $\mathrm{f}(z) = z^2 + 4z$, where z is complex number. Let $z = x + 2i$, where x is a non-zero real number. If $\dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) - \mathrm{f}(z)}{z - \mathrm{f}(z)}$ is a purely imaginary number, find the value of x.

定義 $\mathrm{f}(z) = z^2 + 4z$，其中 z 是一個複數。設 $z = x + 2i$，其中 x 為非零實數。若 $\dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{f}(z)) - \mathrm{f}(z)}{z - \mathrm{f}(z)}$ 是一個純虛數，求 x 的值。

10. The following system of equations has one real number solution:

$$\begin{cases} 3\log_a\left(\sqrt{x}\log_a x\right) = 26 \\ \log_{\log_a x} x = 24 \end{cases}$$

, where a is a positive integer and $x > 1$.

Find the value of a.

下列方程組有一個實數解：

$$\begin{cases} 3\log_a\left(\sqrt{x}\log_a x\right) = 26 \\ \log_{\log_a x} x = 24 \end{cases}$$

，其中 a 是一正整數及 $x > 1$。

求 a 的值。

完

END